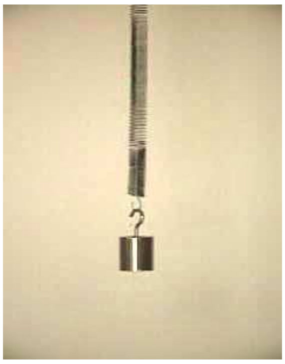
L'objectif est :
 - de dégager des similitudes et des différences dans le mouvement d'un pendule pesant et de celui d'un dispositif solide-ressort
- d'identifier les paramètres susceptibles d'intervenir dans ceux-ci.
- de définir et de mesurer un temps caractéristique pour chacun des deux oscillateurs.
On étudie alors l'influence, sur celui-ci, des paramètres identifiés précédemment.

1-Comparaison des mouvements de deux oscillateurs

Situation de l'étude

On étudie les deux dispositifs suivants : un objet est suspendu par un fil, un autre l'est par un ressort.



Ces objets peuvent être mis en mouvement :
– le premier, en l'écartant de la verticale et en l'abandonnant à lui-même,
– le second, en le déplaçant verticalement au-dessus de sa position d'équilibre et en l'abandonnant à lui-même.

Prévisions

Selon vous, quelles seront les particularités des deux mouvements observés ? Indiquez-en les analogies et les différences.
Analogies : mouvement plan , périodique ou pseudopériodique
Différences :
- pendule : variation de θ au cours du temps
- système solide-ressort : variation de l'altitude z au cours du temps

Pouvez-vous définir pour chacun de ces mouvement, un temps caractéristique ?
Temps caractéristiques :
- période ou pseudopériode c'est à dire la durée d'un « aller-retour »
- temps nécessaire pour retrouver la position d'équilibre

Comment pourrait-on le mesurer avec un simple chronomètre ? (Vous argumenterez le choix de la définition adoptée et la méthode de mesure que vous envisagez)
On mesurera la période T ou la pseudopériode . Pour avoir une bonne précision il convient d'en mesurer un nombre suffisant (soit 10 ou 20 T).

Quels sont, selon vous, les paramètres susceptibles d'intervenir, pour chaque dispositif, sur la valeur du temps caractéristique et dans quels sens ceux-ci doivent-ils intervenir sur ce temps ? (Vous formulerez des propositions argumentées.)

Paramètres susceptibles d'influencer T :

- *pendule pesant (solide mobile autour d'un axe horizontal ne passant pas par son centre d'inertie)*
  - *longueur du fil L*
  - *poids du pendule : masse et g*
  - *angle de déviation initial θ.*
- *pendule élastique*
  - *raideur k du ressort*
  - *amplitude des oscillations*
  - *masse m*

Élaborez un protocole expérimental de l'étude quantitative de l'influence de chacun de ces paramètres.

On fixe 2 des paramètres et on modifie l'autre. On mesure T dans chaque cas

- *pendule pesant (ici on peut considérer que l'on a un pendule simple)*
  - *longueur du fil L : on fixe m et θ (g étant fixé par le lieu de l'expérience) et on joue sur la longueur du fil*
  - *poids du pendule (masse et g) : on fixe L et θ et on modifie m . Pour modifier g il faudrait réaliser les expériences sous d'autres latitudes puis en altitude (malheureusement pas possible lors d'une séance de TP)*
  - *angle de déviation initial θ : : on fixe m et L . On fait varier θ*
- *pendule élastique*
  - *raideur k du ressort : on se fixe une élongation x = l-l0 et une masse m suspendue. On change de ressort (en ayant pris soin d'en mesurer la raideur)*
  - *amplitude des oscillations (élongation initiale) : on joue sur x ; k et m étant constants*
  - *masse m : on joue sur m ; k et x étant constantes*

Expérimentation

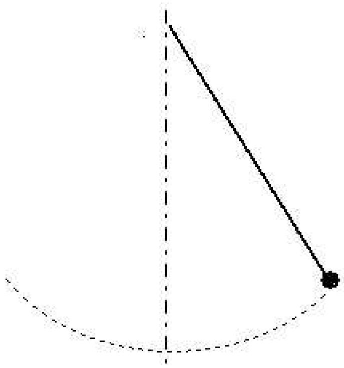
Réaliser les expériences prévues. Vous veillerez à ce que l'influence de chaque paramètre soit étudiée sur les deux dispositifs afin de maintenir l'objectif de comparaison.
À l'issue des manipulations, les résultats obtenus sont consignés au tableau.

Résultats expérimentaux :

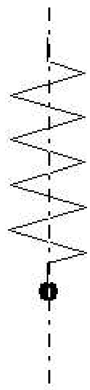
- *pendule pesant (ici pendule simple)*
  - *influence de L : T augmente quand L augmente*
  - *influence de m : T est indépendante de m*
  - *influence de θ : pour θ faible (en pratique < 40°) T est constante*
  - *influence de g : non mesurable mais lire le texte de Huygens*
- *pendule élastique :*
  - *influence de k : T diminue quand k augmente*
  - *influence de x : T est indépendante de x*
  - *influence de m : T augmente quand m augmente*

2- Modèles des oscillateurs

Le modèle correspondant au pendule idéalisé est appelé : ***« pendule simple »***



Celui qui correspond au dispositif solide-ressort idéalisé est appelé ***« pendule élastique »***



Expression de la période des petites oscillations d'un pendule simple

Proposer une expression pour la période des petites oscillations d'un pendule simple et vérifier sa cohérence par analyse dimensionnelle.

Le pendule simple est un objet ponctuel suspendu à un point fixe par un fil inextensible de masse négligeable. Cela correspond au pendule que nous avons réalisé.

Supposons que la période dépende de L, m et g selon la relation :

$T = k.\ L^{\alpha}.\ m^{\beta}.\ g^{\delta}$ *avec k constante sans dimension*

$[T] = [L^{\alpha}.\ m^{\beta}.\ g^{\delta}] = [L]^{\alpha}.\ [M]^{\beta}.\ [g]^{\delta} = [L]^{\alpha}.\ [M]^{\beta}.\ [L.T^{-2}]^{\delta}$

$[T] = [L]^{\alpha+\delta}.\ [M]^{\beta}.\ [T]^{-2\delta}$

Pour que $[L]^{\alpha+\delta}.\ [M]^{\beta}.\ [T]^{-2\delta}$ *soit homogène à un temps, il faut que :*

$\alpha + \delta = 0 \Rightarrow \alpha = -\delta$

$\beta = 0$

$-2\delta = 1 \Rightarrow \delta = -½$ *et donc* $\alpha = -\delta = +½$

Soit une expression de T de la forme $T = k.\sqrt{\frac{l}{g}}$

On montrera que $k = 2\pi$

Et donc $T = 2\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}$

Référence à un texte historique de Huygens

« Il en reste encore une[1], que jusqu'ici on n'a pas cru moins certaine ; qui est que les corps pesants le sont autant en un endroit de la Terre qu'en un autre. Ce qui ayant été trouvé autrement, par des observations qu'on a faites depuis peu, il vaut la peine d'examiner d'où cela peut procéder, et quelles en sont les conséquences.

L'on assure d'avoir trouvé dans la Cayenne, qui est un pays dans l'Amérique, éloigné seulement de 4 à 5 degrés de l'Équateur, qu'un pendule qui bat les secondes[2] y est plus court qu'à Paris d'une ligne et un quart. D'où s'en suit que, si on prend des pendules d'égale longueur, celui de la Cayenne fait des allées un peu plus lentes que celui de Paris. La vérité du fait étant posée, on ne peut douter que ce ne soit une marque assurée de ce que les corps pesants descendent plus lentement en ce pays-là qu'en France. Et comme cette diversité ne saurait être attribuée à la ténuité[3] de l'air, qui est plus grande dans la zone torride (parce qu'elle devrait causer un effet tout contraire), je ne vois pas qu'il puisse y avoir d'autre raison, sinon qu'un même corps pèse moins sous la ligne[4] que sous des climats qui s'en éloignent. »

D'après le texte : *« si on prend des pendules d'égale longueur, celui de la Cayenne fait des allées un peu plus lentes que celui de Paris »* $\Rightarrow$ *à Cayenne T > T Paris*

Et *« qu'un même corps pèse moins sous la ligne[5] que sous des climats qui s'en éloignent. »*

$\Rightarrow$ *g équateur < g Paris*

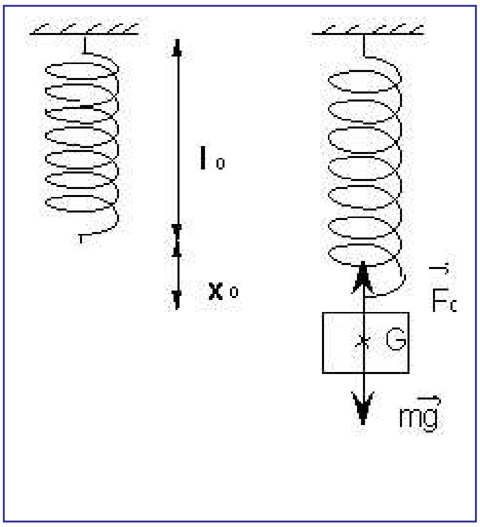
Conclusion : T augmente quand g diminue

Remarque : l'analyse dimensionnelle corrobore ce résultat.

Étude théorique du pendule élastique

Etudier le pendule élastique au repos

L'étude du pendule élastique au repos permet d'accéder à la valeur de k .



[1] Huygens parle des propriétés de la pesanteur.

[2]. Un « pendule qui bat la seconde » a une période de 2 s.

[3]. La « ténuité » de l'air est ce que l'on appellerait aujourd'hui la raréfaction de l'air.

[4] C'est-à-dire à l'équateur.

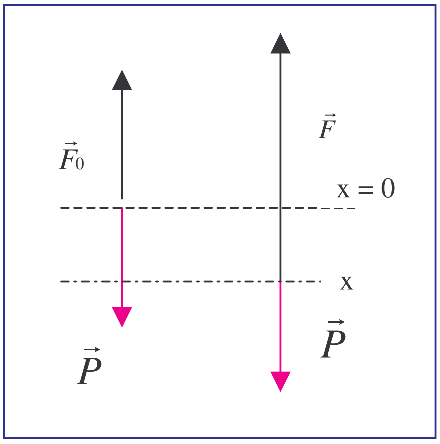
[5] C'est-à-dire à l'équateur.

Au repos :
Le ressort a une longueur à vide l_0.
Lorsqu'on place à son extrémité mobile un objet de masse m , il s'allonge d'une grandeur x0 et prend une longueur l, telle que $l - l_0 = x_0$.
Le centre d'inertie du système solide est alors soumis à :

- poids du solide $\vec{P}$: vertical, vers le bas , d'intensité $P = m.g$
- force de rappel du ressort $\vec{F_0}$: verticale, vers le haut , d'intensité $F_0 = k\ (l-l_0) = k.x_0$

A l'équilibre, d'après le principe d'inertie (on peut aussi utiliser la 2nde loi de Newton) : $\vec{P} + \vec{F_0} = \vec{0}$
Soit $P = F_0$ c'est à dire $m.g = k\ .x_0$

On en déduit : $k = \dfrac{m.g}{x0}$



En mouvement
Etablir l'équation différentielle du mouvement puis l'expression littérale de la période des oscillations T.

On prend pour origine des positions la position d'équilibre soit x = 0 au repos.
Au passage en point d'abscisse x , la 2nde loi de Newton se traduit par :
$\vec{P} + \vec{F} = m.\vec{a_G}$

or $\vec{P} + \vec{F_0} = \vec{0}$ soit $\vec{P} = -\vec{F_0}$ d'où $\vec{F} - \vec{F_0} = m.\vec{a_G}$
$\vec{F} - \vec{F_0} = -k.\ x\ .\ \vec{i} = m.\vec{a_G} = m.\ddot{x}\ .\ \vec{i}$ puisque le mouvement est purement vertical
soit $- k.x = m.\ddot{x}$ ou encore
$m.\ddot{x} + k.x = 0$ équation différentielle du mouvement

La solution d'une équation différentielle de ce type est de la forme : $x(t) = x_{max} \cos(\omega_0.t + \varphi)$

Vérifions : $x(t) = x_{max} \cos(\omega_0.t + \varphi)$
Par conséquent :
$\dot{x}(t) = x_{max}.[\ -\ \omega_0.\ \sin(\omega_0.t + \varphi)]$
$\ddot{x}(t) = x_{max}.[\ -\ \omega_0.\ (\omega_0\ .\cos(\omega_0.t + \varphi))] = -\ \omega_0^2\ .\ x_{max}\cos(\omega_0.t + \varphi) = -\ \omega_0^2\ .\ x(t)$

soit $\ddot{x}(t) + \omega_0^2\ .\ x(t) = 0$
Or l'équation différentielle établie donne : $m.\ddot{x} + k.x = 0$ soit $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}.x = 0$

Par identification, il vient : $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ soit $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Or $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} \Rightarrow$ $\boxed{}$

Comparer les mouvements des deux dispositifs .Conclure
Dans les deux cas les mouvements sont oscillants, de période propre T :

$T = 2\pi.\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ *pour le pendule simple*

$T = 2\pi..\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ *pour le pendule élastique.*

Les expressions des périodes sont du même type soit $T = 2\pi.. \sqrt{\frac{a}{b}}$ a et b étant des grandeurs caractéristiques de l'oscillateur.

Exercice d'application :
Un pendule pesant et un système masse-ressort oscillent tous les deux à la période d'une seconde à Paris.

Comment seront éventuellement modifiées les périodes de ces deux oscillateurs si on les transporte sur la Lune ?
Ce qui change, sur la Lune est le champ de pesanteur donc :

$T = 2\pi. \sqrt{\frac{l}{g}}$ pour le pendule simple $\Rightarrow$ g Lune < g Terre donc T lune > T Terre

La période propre d'oscillations du pendule simple sera plus grande sur la Lune (> 1s) : les battements seront plus lents.

$T = 2\pi.. \sqrt{\frac{m}{k}}$ pour le pendule élastique.$\Rightarrow$ la période est indépendante de g donc T lune = T Terre = 1s

Comment seront éventuellement modifiées les périodes de ces deux oscillateurs si on double leur masse ?
T pendule simple indépendante de m $\Rightarrow$ la période du pendule simple ne sera pas modifiée

$T = 2\pi.. \sqrt{\frac{m}{k}}$ pour le pendule élastique.$\Rightarrow$ si on double m alors T est multipliée par $\sqrt{2}$ soit T 2m = 1,4 s

Comment pouvez-vous expliquer ces différences de comportement ?
La période des petites oscillations du pendule simple dépend de la valeur de l'intensité de la pesanteur mais pas de sa masse.
Au contraire, la période des oscillations du pendule élastique dépend de sa masse mais pas de l'intensité de la pesanteur.